

隠蔽と障害物の大きさを考慮した確率的モデルによる障害物地図の作成

Map Generation of Mobile Robot by Probabilistic Observation Model Considering Occlusion

原口一馬*, 島田伸敬**, 白井良明*

Kazuma HARAGUCHI, Nobutaka SHIMADA, Yoshiaki SHIRAI

*大阪大学大学院工学研究科, {haraguti,shirai}@cv.mech.eng.osaka-u.ac.jp

**立命館大学情報理工学部知能情報学科, shimada@ci.ritsumeai.ac.jp

概要: 本研究では, ロボット内蔵ステレオカメラにより障害物を検出し, ベイズ推定を用い障害物の存在確率を更新し地図を作成する. このとき障害物による隠蔽や障害物の大きさを考慮し, 周囲の状況に合わせて尤度を変化させ地図を更新する. 従来は, 障害物が大きさをもった塊で存在することより, 更新時にその大きさを仮定し境界を与えていた. 本研究では, 障害物が続く確率を考えることで, この境界の有無を確率的に考え地図を更新する.

1. はじめに

目的地へ安全に移動するためには, ロボットは自分の位置, 向きを知り必要がある. 本研究ではロボットの位置, 向き推定による環境埋め込みカメラにロボットの絶対位置と, ロボット内蔵ステレオカメラにより得られる運動量を用いる. そして, それらをカルマンフィルタにより統合してロボットの位置, 向きを推定する [原口 03].

また, ロボットの位置, 向き以外にも, 自分の周りの状況を知る必要がある. 周りの状況として最低限障害物の有無が分かればよい. この障害物の有無を表現するものとして障害物の存在確率地図がある. 障害物の存在確率地図を使うものにはベイズの定理を用いて環境地図を更新していくものが多い [Miura 02]. これらの手法では更新時に地図上の各点が独立と仮定して, 尤度モデルを更新する点ごとに独立に決定することができ高速に更新を行うことができる. しかし, この仮定のために, 障害物による隠蔽や障害物の大きさの影響といった本来考慮されるべき周囲からの影響は考慮されなくなる. それに対し周囲の影響として観測のモデルに隠蔽や障害物の大きさを考慮して環境地図を作成する手法がある [原口 03]. しかし, この手法において考えられるべき障害物の大きさは, 障害物の境界を仮定し与えることで考慮していた. 本研究ではこの障害物の境界を確率的に仮定することで地図を更新する.

2. 障害物存在確率地図

障害物の存在確率地図はグリッド上の各点が障害物の存在確率を持つ (図 1). この地図の更

新にはロボット内蔵カメラのステレオ視による視差情報と推定したロボットの位置, 向きとそれらの誤差を用いる.

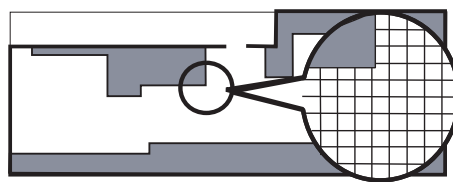


図 1: 障害物存在確率地図

2.1. 存在確率の更新

推定したロボットの位置と向きに誤差がないと仮定し, 時系列で観測が得られたもとでグリッド上の各点における障害物の存在確率について考える. i 番目の点に障害物が存在する事象を E_i , 存在しない事象を \bar{E}_i , 今回のステレオ視による観測を o , 過去のステレオ視による観測列を O とすると, O に続いて o が得られた時の各点における障害物の存在確率 $P(E_i|o, O)$ は,

$$\begin{aligned} P(E_i|o, O) &= \frac{P(o|E_i, O)P(E_i|O)}{P(o|O)} \\ &= \frac{P(o|E_i, O)P(E_i|O)}{P(o|E_i, O)P(E_i|O) + P(o|\bar{E}_i, O)P(\bar{E}_i|O)} \quad (1) \end{aligned}$$

となる. さらに E_i の下で観測 o, O が独立と仮定し $P(o|E_i, O) \simeq P(o|E_i)$, $P(o|\bar{E}_i, O) \simeq P(o|\bar{E}_i)$ と近似すると

$$P(E_i|o, O) \simeq \frac{P(o|E_i)P(E_i|O)}{P(o|E_i)P(E_i|O) + P(o|\bar{E}_i)P(\bar{E}_i|O)} \quad (2)$$

となる．ここで， $P(E_i|\mathbf{O})$ ， $P(\bar{E}_i|\mathbf{O})$ は前回までの観測に基づく障害物の存在確率を表す．尤度 $P(o|E_i)$ ， $P(o|\bar{E}_i)$ をステレオ視のモデルにより計算し，確率の更新を行う．

2.2. 隠蔽を考慮した地図更新のモデル

従来法では，尤度が更新点周りのグリッドから影響を受けないと近似して尤度を計算する．このため，周りの状態を使わず尤度が決定できるので，周りの事前確率を使うことよりも単純に計算でき高速に更新を行えるという利点がある．

しかしながら，本来は尤度 $P(o|E_i)$ は i 番目のグリッドではなくその周りのグリッドによっても決まるものである．このため本研究では周囲の点も考慮して尤度を決定する．周囲から受ける影響として隠蔽を考える．隠蔽はロボットからの視線毎で起るので，視線毎についての更新を考える．更新点の存在する m 番目の視線における観測を o^m とする．さらに，その視線上の各点にも同様に肩付き文字^mをつけ，図2のようにロボットに近いグリッドから順番に番号を付け直す．例えば， m 番目の視線上で k 番目のグリッドに障害物の存在する事象は E_k^m と表す．このとき，特に E_j^m は更新点に障害物が存在する事象を表すものとする．

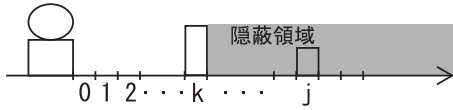


図 2: 隠蔽の影響

m 番目の視線方向における隠蔽の影響について考える．図2のように j 番目の位置と，それより手前側の k ($k < j$) 番目の位置の二ヶ所だけに障害物が存在する可能性がある場合について， $P(o^m|E_j^m)$ は k 番目の位置に障害物が存在する場合と存在しない場合で場合分けすることができ

$$P(o^m|E_j^m) = P(o^m|E_k^m, E_j^m)P(E_k^m) + P(o^m|\bar{E}_k^m, E_j^m)P(\bar{E}_k^m) \quad (3)$$

となる．ここで $P(o^m|E_k^m, E_j^m)$ についてロボットから見て E_j^m は E_k^m により隠蔽される．このため観測は E_j^m には影響を受けず， E_k^m のみの影響を受けると近似でき $P(o^m|E_k^m, E_j^m) \simeq P(o^m|E_k^m)$ となる．その結果，式 (3) は

$$P(o^m|E_j^m) \simeq P(o^m|E_k^m)P(E_k^m) + P(o^m|\bar{E}_k^m, E_j^m)P(\bar{E}_k^m) \quad (4)$$

と近似することができる．同様にすべての場合について場合分けを行う．ここで， $\bar{E}_{m,n}^m = \bar{E}_m^m \cap \bar{E}_{m+1}^m \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1}^m \cap \bar{E}_n^m$ とすると， $P(o^m|E_j^m)$ は $P(o^m|\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m)$ ($k = 1, 2, \dots, j$) を用いて

$$P(o^m|E_j^m) = P(o^m|E_0^m)P(E_0^m) + P(o^m|\bar{E}_0^m, E_1^m)P(\bar{E}_0^m, E_1^m) + \dots + P(o^m|\bar{E}_{0,j-2}^m, E_{j-1}^m)P(\bar{E}_{0,j-2}^m, E_{j-1}^m) + P(o^m|\bar{E}_{0,j-1}^m, E_j^m)P(\bar{E}_{0,j-1}^m, E_j^m) \quad (5)$$

と場合分けすることができる． i 番目以降の障害物は E_i による隠蔽のために見えなくここで， $P(o^m|\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m)$ ($k = 0, 1, \dots, j$) はステレオ視のモデルより求め，同時確率 $P(\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m)$ をすることにより，尤度 $P(o|E_j^m)$ を計算する．

2.3. 障害物の大きさを考えた地図更新

障害物は大きさを持って塊で存在する．よって異なる点同士における障害物の存在は独立とされない．従来はこのことを障害物が平均的な大きさを持つとし，障害物の境界を仮定していた．しかし，実際にはどこに障害物の境界が存在するかということは未知である．そこで，境界の有無を同じ事象が続く確率を考えることで確率的に考慮する． $P(\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m)$ は

$$P(\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m) = P(\bar{E}_0^m)P(\bar{E}_1^m|\bar{E}_0^m)P(\bar{E}_2^m|\bar{E}_{0,1}^m) \dots P(\bar{E}_{k-1}^m|\bar{E}_{0,k-2}^m)P(E_k^m|\bar{E}_{0,k-1}^m)$$

となり，一番近くの点のみの影響を及ぼし合うとして近似すると

$$P(\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m) \simeq P(\bar{E}_0^m)P(\bar{E}_1^m|\bar{E}_0^m)P(\bar{E}_2^m|\bar{E}_1^m) \dots P(\bar{E}_{k-1}^m|\bar{E}_{k-2}^m)P(E_k^m|\bar{E}_{k-1}^m) \quad (6)$$

となる．この式 (6) により隣り合う二つのグリッドでの同時確率がわかれば $P(\bar{E}_{0,k-1}^m, E_k^m)$ が計算できることがわかる．そして，これらの同時確率は直接決定するのではなく，グリッド同士の相関を用いて計算する．隣り合う二つのグリッド k と $k+1$ についての相関 $r_{k,k+1}$ は以下のように定義できる．

$$r_{k,k+1} = \frac{P(E_k^m, E_{k+1}^m) - P(E_k^m)P(E_{k+1}^m)}{\sqrt{P(E_k^m)P(\bar{E}_k^m)P(E_{k+1}^m)P(\bar{E}_{k+1}^m)}} \quad (7)$$

この式により，それぞれの条件付き確率は $\alpha_{k,k+1} = \sqrt{P(E_k^m)P(\bar{E}_k^m)P(E_{k+1}^m)P(\bar{E}_{k+1}^m)}$ と

おくと

$$\begin{aligned} P(E_k^m | E_{k+1}^m) &= P(E_k^m) + r_{k,k+1} \alpha_{k,k+1} / P(E_{k+1}^m) \\ P(E_k^m | \bar{E}_{k+1}^m) &= P(E_k^m) - r_{k,k+1} \alpha_{k,k+1} / P(\bar{E}_{k+1}^m) \\ P(\bar{E}_k^m | E_{k+1}^m) &= P(\bar{E}_k^m) - r_{k,k+1} \alpha_{k,k+1} / P(E_{k+1}^m) \\ P(\bar{E}_k^m | \bar{E}_{k+1}^m) &= P(\bar{E}_k^m) + r_{k,k+1} \alpha_{k,k+1} / P(\bar{E}_{k+1}^m) \end{aligned}$$

となる (付録 A) . このとき , $P(E_k^m)$, $P(E_{k+1}^m)$ は事前確率として与えられるが , 相関の値 $r_{k,k+1}$ は未知となる .

各グリッド同士の相関には実験環境における平均的な相関を用いる . 実験環境において平均的な相関が r_0 となる場合を仮定する . 図 3 の場合において 0 番のグリッドと n 番のグリッドとの相関 $r_{0,n}$ は

$$r_{0,n} = r_0^n \quad (8)$$

となる (付録 B) . このとき n 個離れたグリッドの相関 r_0^n と移動環境中で期待できる相関とをフィッティングすることにより相関の値を決定することを考える . ロボットの移動環境において ,

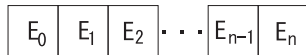


図 3: 複数個並んでいるグリッド

ある k 番目のグリッドの事象が決まったとき k 番目のグリッドから違う事象が起こるグリッドの距離の分布を計算し , ある k 番目のグリッドの事象が決まったとき同じ事象が続く確率を計算する . この確率を相関の値として , 式 (8) とフィッティングするより , ロボットの移動環境において期待できる相関の値を求める . このとき同じ事象が続く確率を解析的に計算するのは困難なので , ロボットの移動環境のモデルと障害物のモデルを図 4 として設定し障害物のモデルを用い , ランダムに始点と方向をサンプリングし , 境界までの距離の分布を計算する . 図 4



図 4: 研究室の障害物のモデル

は用いた研究室のモデルを表す . 白色の領域はあらかじめわかっている固定障害物を表し , 薄い灰色の領域は非固定障害物を , 濃い灰色は障害物のない領域を表す . この地図を用い灰色の

領域の座標と方向をランダムに求め , ものの境界までの距離の分布を推定する . これより , 任意のグリッドと , そのグリッドに対して離れたところにあるグリッドに同じものが存在する確率は図 5 のようになる . 縦軸は障害物が続いて

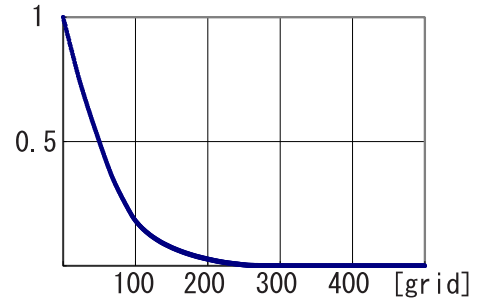


図 5: 障害物が続いている確率

いる確率を表し , 横軸は距離を表す .

この図 5 のグラフと式 (8) の n 個離れた時の相関 r_0^n をフィッティングすることにより決定する . 本研究の移動環境では $r_0^n = 0.978$ となる .

2.4. ロボットの位置 , 向き の誤差を考慮した更新

前節までで述べてきた手法は , ロボットの位置と向き の誤差がないと仮定した場合の計算である . 実際にはロボットの位置や向きは不確かさを持っているので , 以下にロボットの位置や向き の不確かさを考慮した場合の地図の更新について述べる . 更新点のグローバル座標を X , ロボットの位置 , 向き の分布を R , ロボットの位置 , 向き を r とし , その点に対応するローカル座標上の点を $x = x(X, r)$ とする . さらに , グローバル座標上の座標を表すものには肩付き文字 "g" を , ロボット座標を表すものには肩付き文字 "l" をつけ , 例えばグローバル座標上の X における障害物の存在を E_X^g のように表す .

すると , ロボットの位置が分布を持つときに観測が得られたときの障害物の存在確率 $P(E_X^g | o^l, O, R)$ は

$$P(E_X^g | o^l, O, R) = \int P(E_X^g | o^l, O, R, r) P(r | R, o^l, O) dr \quad (9)$$

となる . 本研究では , 外部カメラとエンコーダより十分な精度のロボットの位置 , 向きが得られる . このため , ロボットの位置 , 向きにステレオ視を用いないので , ロボットの位置は現在と過去の観測によらないとして $P(r | R, o^l, O) \simeq P(r | R)$ と近似でき , 式 (9) は

$$P(E_X^g | o^l, O, R) \simeq \int P(E_X^g | o^l, O, R, r) P(r | R) dr$$

となる．さらに，ロボット座標系に座標変換をすると，

$$P(E_X^g | o^l, O, R) \simeq \int P(E_X^l | o^l, O, R, r) P(r | R) dr$$

となる．ベイズの定理より

$$P(E_X^g | o^l, O, R) \simeq \frac{\int P(E_X^l, o^l | O, R, r) P(r | R) dr}{P(o^l | O, R, r)}$$

となる．ここで $P(o^l | O, R, r)$ は r によらず一定なので

$$P(E_X^g | o^l, O, R) \simeq \frac{\int P(E_X^l, o^l | O, R, r) P(r | R) dr}{P(o^l | O, R)} \quad (10)$$

とすることが出来る．ただし，本研究において $P(r | R)$ が正規分布に従うと仮定する．さらに，ロボットの位置，向きは十分な精度で得られているため， $P(r | R)$ が十分な大きさになる r の範囲において $P(E_X^l | o^l, O, R, r)$ はほとんど変化しない．このためロボットの位置，向きの期待値を $r^* = E_R\{r\}$ とすると $P(E_X^l | o^l, O, R, r) \simeq P(E_X^l | o^l, O, R, r^*)$ と近似することができ，式(10)は

$$P(E_X^g | o^l, O, R) \simeq \frac{\int P(E_X^l, o^l | O, R, r^*) P(r | R) dr}{P(o^l | O, R)}$$

となる． $P(E_X^l, o^l | O, R, r^*)$ と $P(r | R)$ の平均と誤差を前節までの方法より計算し，地図を更新する．

2.5. 障害物検出と経路計画

前節までで更新される地図中において，障害物の存在確率が高い部分を障害物とする．ただし，障害物ではない部分であってもロボットが通れないような狭い部分は障害物とする．このようにして地図中に障害物の塊を作成する．本研究において障害物とみなす閾値を 0.9 とした．そして，ロボットは，これらの障害物の塊を避ける経路を計画する．経路は円弧と直線を滑らかに結ぶことにより生成する．図 6 は計画される経路の例を示す．白色の領域は閾値処理により障害物と見なされた領域を示し，白で示されている線分が計画されるコースを示す．このようにして出来たすべての経路の中で目的地まで最短時間で到達できる経路を選択し，目的地へ移動する．

3. 実験

確率地図を従来手法で更新した場合と本手法で更新した結果の比較実験を行った．図 7 はス

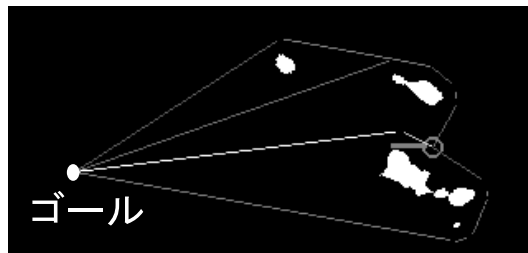


図 6: コース選択の概要

テレオ対応付けの結果を示す．図の右側は入力画像を左側は視差画像を示す．視差画像では視差を灰色で示し，近いものから遠いものまで暗い色から明るい色のグラデーションを用いて表す．また，図 8 は従来法による地図の更新結果を，図 9 は我々の手法による地図の更新結果を示す．

ここで，図 8,9 の (a)(b) 間での更新について説明する．この更新において地図中の二つの円のうちロボットからみて奥側の領域 Y に障害物が存在するという誤対応の観測が得られている．この観測により，従来法では領域 Y の尤度比が大きくなり，ロボットからみて手前側の円で囲まれた領域 X の尤度比が小さくなる．ここで，各点における尤度比 $P(o | E_i) / P(o | \bar{E}_i)$ が 1 より大きければ障害物の存在確率は高くなるように更新される．このため実際には障害物の存在する領域であるにもかかわらず，領域 X の存在確率が下がる．これに対し，本手法では前回までの観測によって領域 Y は隠蔽されている領域となる．その結果，観測が得られても尤度比は 1 に近い値をとり確率はほとんど変化しない．これにより実際には障害物が存在する領域が障害物ではないと判断されてしまうことを防げる．

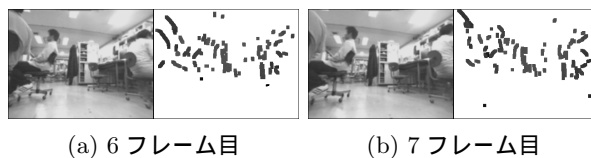


図 7: 入力画像と視差画像

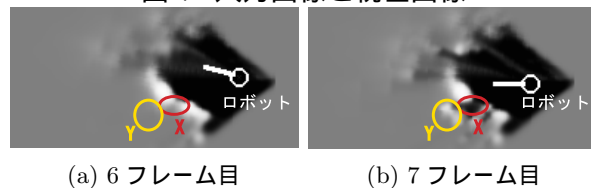


図 8: 我々の方法による地図の更新結果

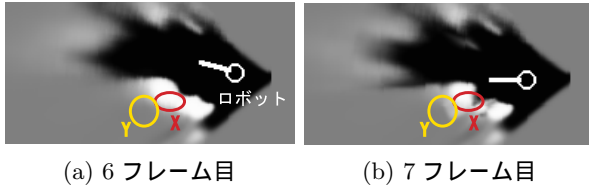


図 9: 我々の方法による地図の更新結果

4. おわりに

外部観測と内部観測を統合したロボットの位置推定について述べ、隠蔽や障害物の大きさを考慮に入れた障害物の更新について提案した。また、本手法により、従来では実際には障害物の領域が障害物ではなくなってしまう問題に対処した。

本研究では、相関の値は研究室のモデルより決定された値を使用し、観測が入っても更新していない。しかし、観測が何回も入ってくれば真の相関の値がだんだん分かってくるはずである。そこで、観測が入るたびに相関の値も更新していきたい。

また、尤度の計算において同じ視線方向におけるものの大きさは考慮しているが、異なる視線毎におけるものの大きさ考慮していない。このため、真の意味での障害物の大きさを考慮できていない。今後は異なる視線方向に対しても障害物の大きさの影響を考慮した地図の更新を行いたい。

参考文献

- [Miura 02] J.Miura, Y.Negishi, and Y.Shirai. :Mobile Robot Map Generation by Integrating Omnidirectional Stereo and Laser Range Finder. *IEEE/RSJ'2002*, pp.250-255, 2002.
- [原口 03] 原口, 島田, 白井. :環境埋め込みカメラとロボット内蔵カメラを組み合わせた障害物回避と移動. *IM2003* pp.125-130 2003.
- [先山 02] 先山, 原口, 島田, 白井. :案内ロボットのための障害物回避と誘導, *FIT'2002*, LI-11, Vol.1, pp.145-146, 2002.
- [Welch 01] G.Welch and G.Bishop. :An Introduction to the Kalman Filter. *SIG-GRAPH2001*.

A 隣り合うグリッドのみでおよぼし合う影響

二つの事象 x, y があり、それぞれの事象がお互いに影響を及ぼしあうとき、その相関は $r_{x,y}$

は

$$r_{xy} = \frac{\sum P(x, y)(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum P(x)(x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum P(y)(y - \bar{y})^2}}$$

となる。 x の事象として $x = x_1, x = x_2$, y の事象として $y = y_1, y = y_2$ というそれぞれ二つの事象のみを持っている場合を考える。このとき平均を \bar{x}, \bar{y} とすると

$$\begin{cases} \bar{x} = E(x) = P(x_1)x_1 + P(x_2)x_2 \\ \bar{y} = E(y) = P(y_1)y_1 + P(y_2)y_2 \end{cases}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} (x_1 - \bar{x}) &= P(x_2)(x_1 - x_2) \\ (x_2 - \bar{x}) &= -P(x_1)(x_1 - x_2) \\ (y_1 - \bar{y}) &= P(y_2)(y_1 - y_2) \\ (y_2 - \bar{y}) &= -P(y_1)(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

となることより、それぞれの自己分散は

$$\begin{aligned} \sum P(x)(x - \bar{x})^2 &= \sum P(x)x^2 - \left\{ \sum P(x)\bar{x} \right\}^2 \\ &= P(x_1)P(x_2)(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P(y)(y - \bar{y})^2 &= \sum P(y)y^2 - \left\{ \sum P(y)\bar{y} \right\}^2 \\ &= P(y_1)P(y_2)(y_1 - y_2)^2 \end{aligned}$$

となる。また、共分散は

$$\begin{aligned} &\sum P(x, y)(x - \bar{x})(y - \bar{y}) \\ &= P(x_1, y_1)(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) \\ &\quad + P(x_1, y_2)(x_1 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) \\ &\quad + P(x_2, y_1)(x_2 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) \\ &\quad + P(x_2, y_2)(x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) \\ &= \{P(x_1, y_1) - P(x_1)P(y_1)\}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

となる。 $x_1 > x_2, y_1 > y_2$ とすると、 x, y の相関 r_{xy} は

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{P(x_1, y_1) - P(x_1)P(y_1)}{\sqrt{P(x_1)P(x_2)P(y_1)P(y_2)}} \\ &= \frac{P(x_1, y_1) - P(x_1)P(y_1)}{\alpha_{xy}} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\alpha_{xy} = \sqrt{P(x_1)P(x_2)P(y_1)P(y_2)}$ とする。ここで、

$$\begin{aligned} P(x_1) &= P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) \\ P(x_2) &= P(x_2, y_1) + P(x_2, y_2) \\ P(y_1) &= P(x_1, y_1) + P(x_2, y_1) \\ P(y_2) &= P(x_1, y_2) + P(x_2, y_2) \end{aligned}$$

を用いると,

$$\begin{cases} P(x_1, y_1) = r_{xy}\alpha_{xy} + P(x_1)P(y_1) \\ P(x_1, y_2) = -r_{xy}\alpha_{xy} + P(x_1)P(y_2) \\ P(x_2, y_1) = -r_{xy}\alpha_{xy} + P(x_2)P(y_1) \\ P(x_2, y_2) = r_{xy}\alpha_{xy} + P(x_2)P(y_2) \end{cases} \quad (11)$$

となり, 同時確率が相関の値と事前確率より示されることがわかる. さらに本研究では, 二つの事象として, 障害物が存在する事象 E_x, E_y と障害物が存在しない事象 $\overline{E_x}, \overline{E_y}$ を考えるので, それぞれ置き換えると,

$$\begin{cases} P(E_x, E_y) = r_{xy}\alpha_{xy} + P(E_x)P(E_y) \\ P(E_x, \overline{E_y}) = -r_{xy}\alpha_{xy} + P(E_x)P(\overline{E_y}) \\ P(\overline{E_x}, E_y) = -r_{xy}\alpha_{xy} + P(\overline{E_x})P(E_y) \\ P(\overline{E_x}, \overline{E_y}) = r_{xy}\alpha_{xy} + P(\overline{E_x})P(\overline{E_y}) \end{cases}$$

となる. さらに条件付き確率は

$$\begin{cases} P(E_x|E_y) = r_{xy}\alpha_{xy}/P(E_y) + P(E_x) \\ P(E_x|\overline{E_y}) = -r_{xy}\alpha_{xy}/P(\overline{E_y}) + P(E_x) \\ P(\overline{E_x}|E_y) = -r_{xy}\alpha_{xy}/P(E_y) + P(\overline{E_x}) \\ P(\overline{E_x}|\overline{E_y}) = r_{xy}\alpha_{xy}/P(\overline{E_y}) + P(\overline{E_x}) \end{cases}$$

B 離れたグリッドの相関

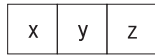


図 10: 複数個並んでいるグリッド

図 10 における離れたグリッドでの同時確率 $P(x_1, z_1)$ は y_1, y_2 で場合分けできるので

$$\begin{aligned} P(x_1, z_1) &= P(x_1, y_1, z_1) + P(x_1, y_2, z_1) \\ &= P(z_1|x_1, y_1)P(x_1, y_1) + P(z_1|x_1, y_2)P(x_1, y_2) \end{aligned}$$

となる. ここで, グリッドが一番近いグリッドの影響を受けると仮定すると

$$P(x_1, z_1) \sim P(z_1|y_1)P(x_1, y_1) + P(z_1|y_2)P(x_1, y_2)$$

と近似できる. これよりこれより二つのグリッドにおける同時確率が計算できるので

$$P(x_1, z_1) = \frac{P(z_1, y_1)P(x_1, y_1)}{P(y_1)} + \frac{P(z_1, y_2)P(x_1, y_2)}{P(y_2)}$$

となり, 式 (11) を用いると

$$\begin{aligned} P(x_1, z_1) &= \frac{\alpha_{xy}\alpha_{yz}r_{xy}r_{yz}}{P(y_1)P(y_2)} + P(x_1)P(z_1) \\ &= r_{xy}r_{yz}\alpha_{xz} + P(x_1)P(z_1) \end{aligned}$$

となる. よって

$$r_{x,z} = r_{x,y}r_{y,z}$$

となる. 同様にして考えると離れたグリッドにおける相関はその間のグリッドの相関の積で表されることがわかる.